

ΕΡΓΑΣΙΑ 8
ΚΙΝΗΣΗ ΜΕ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΟΥ ΔΕΝ ΕΧΟΥΝ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΙ
ΤΡΙΒΗ

1. Σώμα μάζας $m=2\text{Kg}$ είναι ακίνητο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη \vec{F} με φορά προς τα δεξιά. Να βρεθεί η επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα όταν :

α) $|F|=7\text{N}$

β) $|F|=14\text{N}$.

Δίνονται τα μέτρα της οριακής τριβής $|T_{\text{op}}|=12\text{N}$ και της τριβής ολίσθησης $|T_{\text{ολ}}|=10\text{N}$.

(0, 2m/s^2)

2. Σώμα μάζας $m=2\text{Kg}$ είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο και στο σώμα ασκείται δύναμη μέτρου $|F|=10\text{N}$ η διεύθυνση της οποίας σχηματίζει γωνία $\varphi=30^\circ$ με την οριζόντια διεύθυνση. Να βρεθούν :

α) Η επιτάχυνση \vec{a} που θα αποκτήσει το σώμα,

β) Η δύναμη \vec{N} που ασκεί το έδαφος στο σώμα.

Δίνεται $|g|=10\text{m/s}^2$, $\eta\mu 30^\circ=0,5$ και $\sigma\upsilon\nu 30^\circ=0,85$.

($4,25\text{m/s}^2$, 15N)

3. Σώμα μάζας $m=10\text{Kg}$ είναι ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο και στο σώμα ασκείται δύναμη μέτρου $|F|=100\text{N}$ η διεύθυνση της οποίας σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντια διεύθυνση. Να βρεθούν :

α) Αν το σώμα θα κινηθεί.

β) Η τριβή ολίσθησης \vec{T} που θα ασκείται στο σώμα αν κινηθεί,

γ) Η επιτάχυνση \vec{a} που θα αποκτήσει το σώμα αν κινηθεί.

Δίνεται $|g|=10\text{m/s}^2$, $\eta\mu\varphi=0,6$, $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,8$ ο συντελεστής οριακής τριβής $\mu_{\text{op}}=0,6$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης $\mu_{\text{ολ}}=0,5$.

(20N, 6m/s^2)

4. Σώμα μάζας m εκτοξεύεται προς τα πάνω από τη βάση λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$ με ταχύτητα μέτρου $|u_0|=20\text{m/s}$. Να βρεθούν :

α) Η επιτάχυνση \vec{a} του σώματος κατά την προς τα πάνω κίνηση του,

β) Πόσο διάστημα θα διανύσει το σώμα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο ανεβαίνοντας,

γ) Ποιο θα είναι το μέγιστο ύψος από το έδαφος που θα φτάσει το σώμα.

Δίνεται $|g|=10\text{m/s}^2$, $\eta\mu 30^\circ=0,5$ και $\sigma\upsilon\nu 30^\circ=0,85$.

(5m/s^2 , 40m , 20m)

5. Σώμα μάζας $m=2\text{Kg}$ αφήνεται να ολισθήσει προς τα κάτω από κάποιο σημείο κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$. Να βρεθούν :

α) Αν το σώμα θα κινηθεί.

β) Η επιτάχυνση \vec{a} που θα αποκτήσει το σώμα αν κινηθεί,

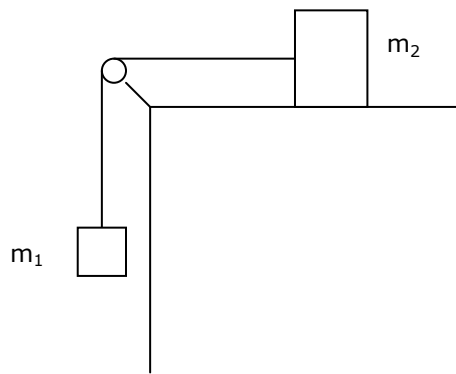
γ) Η δύναμη \vec{N} που ασκεί το έδαφος στο σώμα.

Μπορούσε να απαντηθεί το ερώτημα α αν δε δινόταν η μάζα;

Δίνεται $|g|=10\text{m/s}^2$, $\eta\mu 30^\circ=0,5$ και $\sigma\upsilon\nu 30^\circ=0,85$ ο συντελεστής οριακής τριβής $\mu_{\text{op}}=0,3$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης $\mu_{\text{ολ}}=0,2$.

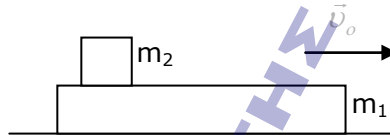
($3,3\text{m/s}^2$, 17N)

6. Δίνεται η διάταξη του παρακάτω σχήματος :



Αν το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται η μάζα m_2 είναι λείο και δίνονται τα $m_1=2\text{Kg}$, $m_2=3\text{Kg}$ και $g=10\text{m/s}^2$, να βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης καθενός απ' τα δύο σώματα αν αφήσουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί.

7. Σώμα μάζας $m_2=5\text{Kg}$ βρίσκεται πάνω σε σώμα μάζας $m_1=15\text{Kg}$ το οποίο βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Το σύστημα των δύο σωμάτων κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $|u_0|=30\text{m/s}$ προς τα δεξιά. Είναι γνωστό ότι αν στο σώμα m_1 ασκηθεί σταθερή οριζόντια δύναμη \vec{F} με φορά προς τα αριστερά και το μέτρο της είναι $|F|\leq 60\text{N}$, το σώμα m_2 δεν κινείται πάνω στο m_1 λόγω της στατικής τριβής.

α. Να βρείτε τη στατική τριβή ανάμεσα στα δύο σώματα όταν αυτά κινούνται με σταθερή ταχύτητα.

β. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στα δύο σώματα όταν ασκείται η \vec{F} και είναι $|F|\leq 60\text{N}$ και να βρείτε το συντελεστή οριακής τριβής ανάμεσα στα δύο σώματα m_1 και m_2 .

γ. Αν $|F|=40\text{N}$, να βρείτε την επιτάχυνση του κάθε σώματος καθώς και το μέτρο της στατικής τριβής.

δ. Αν $|F|=105\text{N}$:

i. να βρείτε την επιτάχυνση του κάθε σώματος σε μέτρο και κατεύθυνση

ii. να βρείτε το χρόνο απ' τη στιγμή που ασκήθηκε η \vec{F} μέχρι να σταματήσει το κάθε σώμα.

iii. να βρείτε το διάστημα που διήνυσε το m_2 πάνω στο m_1 μέχρι να σταματήσει

iv. αν το m_1 ήταν αυτοκίνητο και το m_2 επιβάτης και φορούσε ζώνη ασφαλείας, να βρείτε τη δύναμη που θα δεχόταν ο επιβάτης απ' τη ζώνη ασφαλείας.

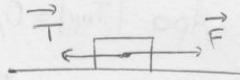
Από το σχολικό βιβλίο :

από τις σελίδες 151-156 οι ερωτήσεις : **7, 8, 9, 10, 14, 15, 17, 25, 29, 30, 44, 46, 49, 50, 53** και από τις σελίδες 157-159 οι ασκήσεις : **3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 22, 23, 24, 25**.

ΕΡΓΑΣΙΑ 8 ΛΥΣΕΙΣ

(1)

Άσκηση 1

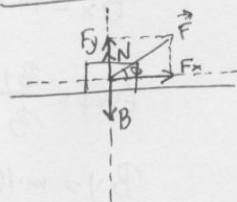


α) Αν $|F|=7\text{N}$ επειδή $|F| < |T_{\text{op}}|$ η τριβή θα είναι στατική $|T_{\text{στ}}|=|F|=7\text{N}$ και $\Sigma F=0$ άρα το σώμα θα μείνει ακίνητο

β) Αν $|F|=14\text{N}$ επειδή $|F| > |T_{\text{op}}|$ το σώμα θα κινηθεί και η τριβή θα είναι τριβή ολίσθησης με μέτρο $|T_{\text{ολ}}|=10\text{N}$ άρα $|\Sigma F|=|F|-|T_{\text{ολ}}|=14-10=4\text{N}$ και $|\Sigma F|=m|a| \rightarrow$

$$|a| = \frac{|\Sigma F|}{m} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m/s}^2 \text{ με κατεύθυνση προς τα δεξιά.}$$

Άσκηση 2



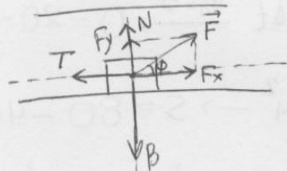
$$\mu\phi = \frac{F_y}{F} \rightarrow F_y = F \cdot \mu\phi = 5\text{N}$$

$$\cos\phi = \frac{F_x}{F} \rightarrow F_x = F \cdot \cos\phi = 8\text{N}$$

α) Είναι $\Sigma F_x = m \cdot a \rightarrow F_x = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F_x}{m} = \frac{8,5}{2} \rightarrow a = 4,25 \text{ m/s}^2$

β) Είναι $\Sigma F_y = 0 \rightarrow |F_y| + |N| = |B| \rightarrow |N| = |B| - |F_y| \rightarrow |N| = 20 - 5 \rightarrow |N| = 15\text{N}$

Άσκηση 3



$$\mu\phi = \frac{F_y}{F} \rightarrow F_y = F \cdot \mu\phi \rightarrow F_y = 60\text{N}$$

$$\cos\phi = \frac{F_x}{F} \rightarrow F_x = F \cdot \cos\phi \rightarrow F_x = 80\text{N}$$

α) Για να κινηθεί το σώμα, θα πρέπει $|F_x| > |T_{\text{op}}|$ άρα πρέπει να βρούμε την οριακή τριβή.

Είναι $|T_{op}| = \mu_{op} |N|$. Η Ν θα βρεθεί από τον άξονα y

$$\text{στον οποίο είναι } \sum F_y = 0 \rightarrow |N| + |F_y| = |B| \rightarrow |N| = |B| - |F_y| \rightarrow$$

$$|N| = 100 - 60 \rightarrow |N| = 40 \text{ N} : \text{Άρα } |T_{op}| = 0,6 \cdot 40 \rightarrow |T_{op}| = 24 \text{ N}$$

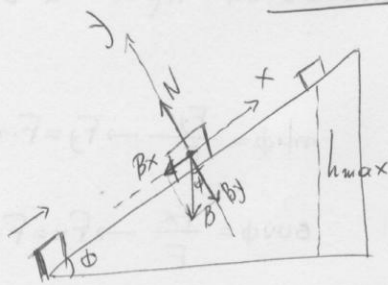
Άρα το σώμα θα κινηθεί και η τριβή που θα του ασκείται θα είναι τριβή ολίσθησης ίση με $|T_{ol}| = \mu_{ol} |N| \rightarrow$

$$|T_{ol}| = 0,5 \cdot 40 \rightarrow |T_{ol}| = 20 \text{ N}$$

$$\text{β) Θα είναι } |\sum F_x| = m|a| \rightarrow |F_x| - |T_{ol}| = m|a| \rightarrow$$

$$80 - 20 = 10|a| \rightarrow |a| = 6 \text{ m/s}^2$$

Άσκηση 4



$$\mu \phi = \frac{B_x}{B} \rightarrow B_x = B \mu \phi = mg \mu \phi \rightarrow$$

$$B_x = m \cdot 10 \cdot 0,5 \rightarrow B_x = 5 \text{ m}$$

$$\cos \phi = \frac{B_y}{B} \rightarrow B_y = B \cos \phi = mg \cos \phi \rightarrow$$

$$B_y = m \cdot 10 \cdot 0,85 \rightarrow B_y = 8,5 \text{ m}$$

$$\alpha) \text{ Είναι } |\sum F_x| = m|a| \rightarrow |B_x| = m|a| \rightarrow 5 \text{ m} = m|a| \rightarrow |a| = 5 \text{ m/s}^2$$

και φορά ίδια με του \vec{B}_x .

$$\beta) s = |v_0| \Delta t - \frac{1}{2} |a| \Delta t^2 = 20 \Delta t - \frac{1}{2} \cdot 5 \Delta t^2$$

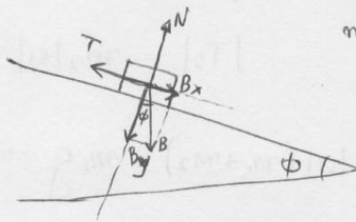
$$\text{Είναι } |v| = |v_0| - |a| \Delta t \xrightarrow{|v|=0} 0 = 20 - 5 \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = 4 \text{ s}$$

$$\text{Άρα } s = 20 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4^2 \rightarrow s = 80 - 40 \rightarrow s = 40 \text{ m}$$

$$\delta) \text{ Είναι } \mu \phi = \frac{h_{\max}}{s} \rightarrow h_{\max} = s \cdot \mu \phi = 40 \cdot 0,5 = 20 \text{ m}$$

Άσκηση 5

3



$$\eta\phi = \frac{B_x}{B} \rightarrow B_x = B \cdot \eta\phi \rightarrow$$

$$B_x = 2 \cdot 10 \cdot 0,5 = 10 \text{ N}$$

$$\sigma\eta\phi = \frac{B_y}{B} \rightarrow B_y = B \cdot \sigma\eta\phi \rightarrow$$

$$B_y = 2 \cdot 10 \cdot 0,85 = 17 \text{ N}$$

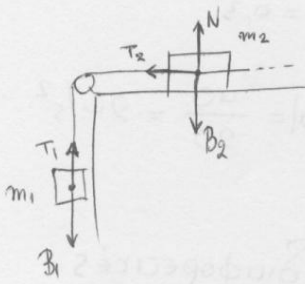
α) Για να δούμε αν θα κινηθεί πρέπει να βρούμε την οριακή τριβή T_{op} . Άρα χρειάζομαστε τη N που θα τη βρούμε αν τον άξονα y . Είναι $\sum F_y = 0 \rightarrow$
 $|N| = |B_y| \rightarrow |N| = 17 \text{ N}$ άρα $|T_{op}| = \mu_{op}|N| = 0,3 \cdot 17$
 $\rightarrow |T_{op}| = 5,1 \text{ N}$. Άρα αφού $|B_x| > |T_{op}|$ το σώμα θα κινηθεί

β) Είναι $|T_{ol}| = \mu_{ol}|N| = 0,2 \cdot 17 = 3,4 \text{ N}$ Άρα $|\sum F_x| = m|a| \rightarrow$

$$|B_x| - |T_{ol}| = m|a| \rightarrow 10 - 3,4 = 2|a| \rightarrow 6,6 = 2|a| \rightarrow$$

$$|a| = 3,3 \text{ m/s}^2 \text{ με κατεύθυνση ίδια με του } B_x.$$

Άσκηση 6



Οι \vec{T}_1 και \vec{T}_2 είναι ίσες σε μέτρο αφού αν το νήμα θεωρηθεί αβαρές είναι σαν να ακουμπάει σε ευθείες από το ένα σώμα στο άλλο άρα είναι δράση-αντίδραση

Στο σώμα 1 είναι $|\sum F| = m_1|a| \rightarrow$

$$|B_1| - |T_1| = m_1|a| \text{ και στο σώμα 2 είναι}$$

$$|\sum F_x| = m_2|a| \rightarrow |T_2| = m_2|a|. \text{ Προφανώς}$$

τα δύο σώματα έχουν την ίδια επιτάχυνση αφού κάθε σώτη έχουν αν ίδια γαχύτητα.

Άρα έχουμε το σύστημα $|B_1| - |T_1| = m_1 |a|$ $\left. \begin{matrix} |T_1| = |T_2| \\ |T_2| = m_2 |a| \end{matrix} \right\}$

$|B_1| - m_2 |a| = m_1 |a| \rightarrow |a| (m_1 + m_2) = m_1 g \rightarrow |a| = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}$

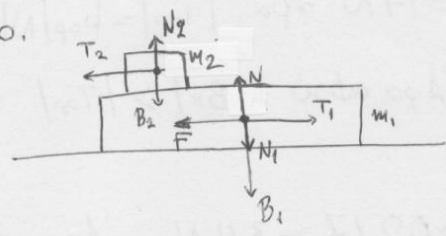
$\rightarrow |a| = \frac{20}{5} \rightarrow |a| = 4 \text{ m/s}^2$

Στην άσκηση Γ χρειαζόμαστε δύο διευκρινίσεις των εκφώνησών
 α) Είναι $\mu_{op} = \mu_{ol}$.
 β) Στο ερώτημα iii του δ να συμπληρωθεί "πέχει να σταθαιστεί το m1"

Άσκηση Γ

α. Όταν τα δύο σώματα κινούνται με σταθερή ταχύτητα δεν υπάρχει στατική τριβή διότι το ένα σώμα δεν "προσπαθεί" να κινηθεί σε σχέση με το άλλο.

β.



\vec{T}_1, \vec{T}_2 : δράση-αντίδραση
 \vec{N}_1, \vec{N}_2 : δράση-αντίδραση

Αν $|F| = 60 \text{ N}$ τότε η τριβή είναι οριακή. Είναι

$|F| - |T_1| = m_1 |a|$ $\left. \begin{matrix} |T_1| = |T_2| \\ |T_2| = m_2 |a| \end{matrix} \right\} \rightarrow |F| = (m_1 + m_2) |a| \rightarrow |a| = \frac{60}{20} = 3 \text{ m/s}^2$

Άρα $|T_2| = m_2 |a| = 5 \cdot 3 \rightarrow |T_2| = 15 \text{ N} \rightarrow \mu_{op} |N_2| = 15$.

Όπως $|N_2| = |B_2| = 50 \text{ N}$ άρα $\mu_{op} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0,3$

γ. Αν $|F| = 40 \text{ N}$ είναι $|F| = (m_1 + m_2) |a| \rightarrow |a| = \frac{40}{20} = 2 \text{ m/s}^2$

$|T_2| = |T_{op}| = m_2 |a| = 10 \text{ N}$

δ. Αν $|F| = 105 \text{ N}$ τα δύο σώματα έχουν διαφορετικές επιταχύνσεις a_1 και a_2 και $|T_1| = |T_2| = |T_{op}| = |T_{ol}| = 15 \text{ N}$

Είναι $|F| - |T_1| = m_1 |a_1| \rightarrow 105 - 15 = 15 |a_1| \rightarrow |a_1| = 6 \text{ m/s}^2$ και

$|T_2| = m_2 |a_2| \rightarrow |a_2| = 3 \text{ m/s}^2$ και οι δύο προς τα αριστερά!

για το σώμα m_1 έχουμε: $s_1 = 100\Delta t - \frac{1}{2}|a_1|\Delta t^2 \rightarrow$ (5)

$$s_1 = 30 \cdot \Delta t_1 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \Delta t_1^2 \rightarrow s_2 = 30\Delta t_2 - 3\Delta t_2^2 \text{ και } |v_1| = |v_2| = 100 - |a_1|\Delta t_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow s_1 = 30 \cdot 5 - 3 \cdot 25 = 150 - 75 = 75 \text{ m} \quad 0 = 30 - 6 \cdot \Delta t_1 \rightarrow \Delta t_1 = 5 \text{ s.}$$

για το σώμα m_2 έχουμε ~~οι δύο σώματα κινούνται μαζί~~

$$|v_1| = |v_2| = 100 - |a_2|\Delta t_2 \rightarrow 0 = 30 - 3\Delta t_2 \rightarrow \Delta t_2 = 10 \text{ s}$$

δηλαδή θα σταματήσει πρώτο το m_1 .
 Άρα μέχρι να σταματήσει το m_1 , το m_2 έχει διανύσει διάστημα

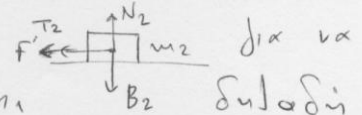
$$s_2 = 100\Delta t_1 - \frac{1}{2}|a_2|\Delta t_1^2 = 30 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5^2 = 150 - \frac{75}{2} = 112,5 \text{ m}$$

Έτσι πάνω στο m_1 , το m_2 έχει διανύσει διάστημα

$$s = s_2 - s_1 = 112,5 - 75 = 37,5 \text{ m}$$

Αυτή η άσκηση προσομοιώνει την περίπτωση που έχουμε ένα αυτοκίνητο (το m_1) και ένα επιβάτη (το m_2) που κινούνται με κάποια ταχύτητα ($30 \text{ m/s} = 108 \text{ km/h}$) και το αυτοκίνητο φρενάρει (δύναμη F) Η δύναμη F επιβραδύνει το αυτοκίνητο. Τον επιβάτη τον επιβραδύνει η στατική τριβή (μ ή T_2). Η στατική τριβή όπως δεν μπορεί να μεγαλώσει απεριόριστα (μέχρι των οριακή τριβή). Άρα αν το φρενάρισμα δεν είναι απότομο, η δύναμη F είναι μικρή (ερώτημα δ) και η στατική τριβή μπορεί να μεγαλώσει αρκετά ώστε το σώμα να μην κινηθεί προς τα μπροστά σε σχέση με το αυτοκίνητο. Αν όμως το φρενάρισμα είναι απότομο, τότε η δύναμη F είναι μεγάλη και η τριβή όσο και να μεγαλώσει δεν είναι αρκετή να κρατήσει το m_2 πάνω στο m_1 και έτσι αυτό δεν επιβραδύνεται αρκετά δηλαδή και κινείται μπροστά σε σχέση με αυτό (ερώτημα ε).

Γι' αυτό πρέπει να φοράτε ζώνη ασφαλείας ώστε αυτό να ακινητοποιηθεί προς τα αριστερά σε δύναμη που αναπτύσσεται. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα αν F η δύναμη της ζώνης



έχει το m_2 την ίδια επιτάχυνση με το m_1 δηλαδή $|a_2| = |a_1| = 6 \text{ m/s}^2$ δηλαδή $|\Sigma F| = m_2|a_2| \rightarrow |F| + |T_2| = m_2|a_2|$
 $\rightarrow |F| + 15 = 30 \rightarrow |F| = 15 \text{ N}$.